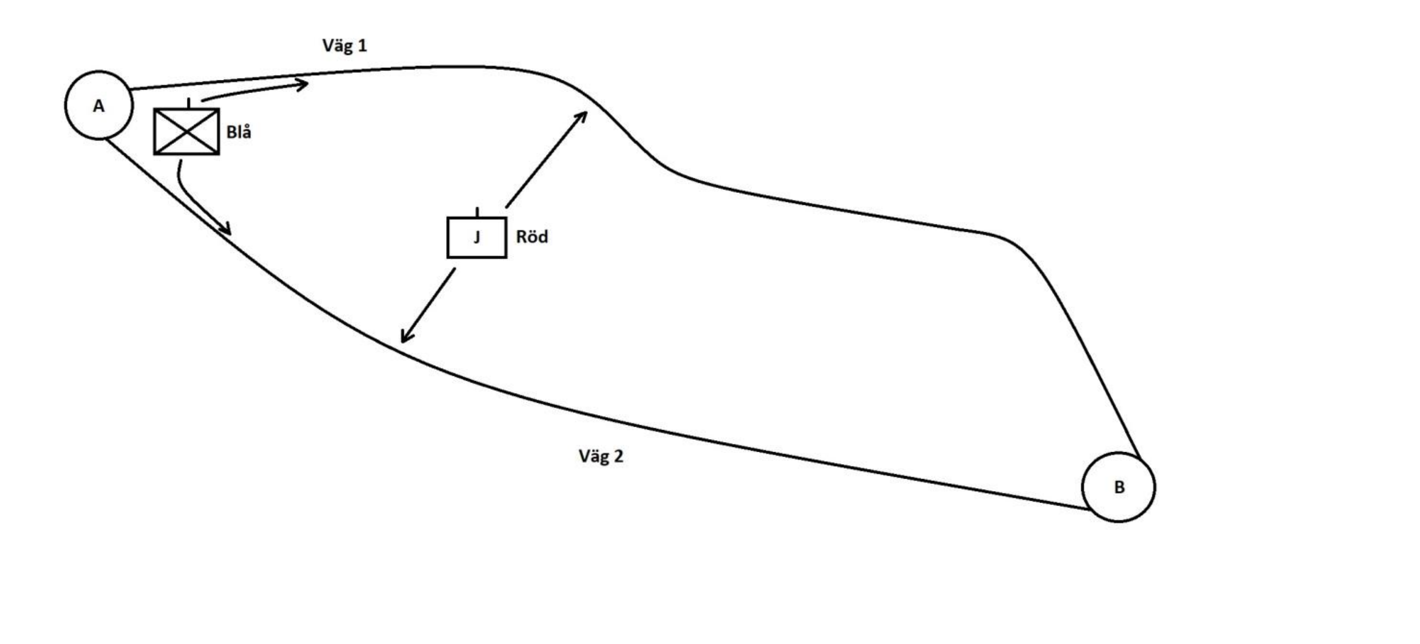
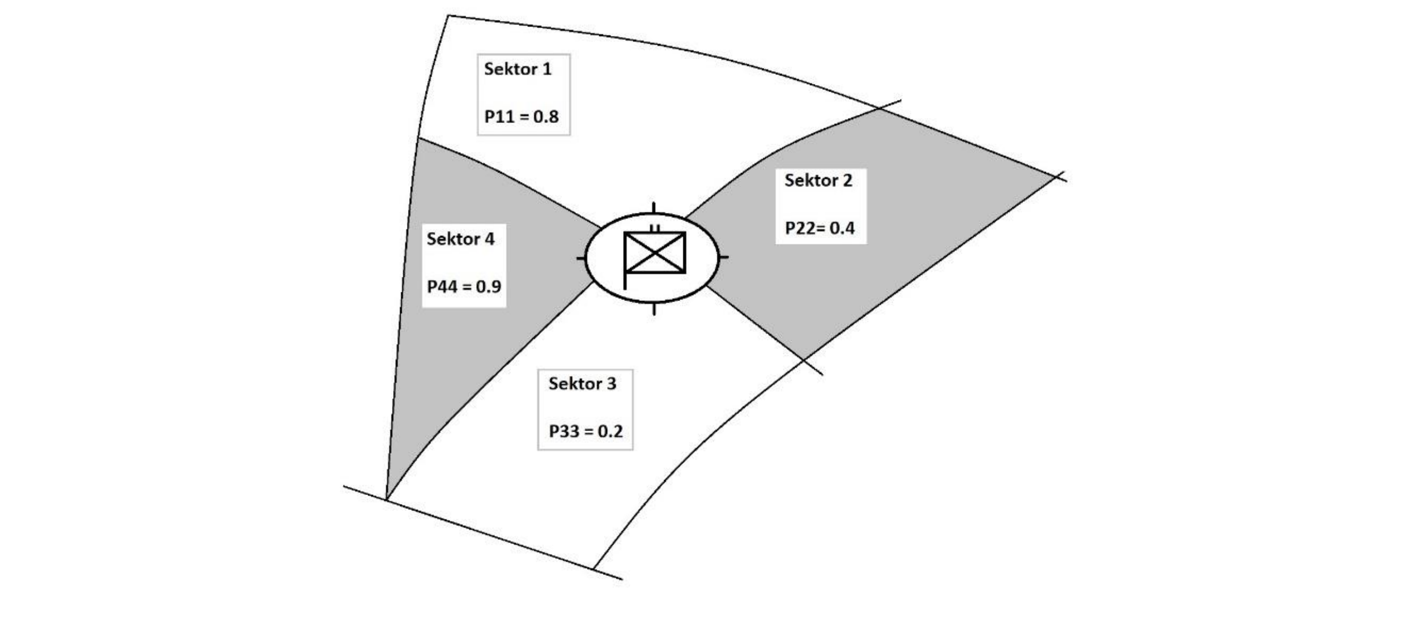
Optimal Jägarstrid

Peter Lohmander





Kamratföreningen Blå Dragoner,
Umeå Skvadron
Torsdagen den 18 April, 2024
G-mässen, Umeå

Version 240318_1444

- ***Jägarstrid är en viktig komponent i vårt försvar.***

- ***Jägarstrid bedrivs av mycket motiverade och mångsidigt kompetenta individer, med gedigen och krävande utbildning, under extrema förhållanden.***

- ***Min ambition är att med följande presentation ytterligare effektivisera vår framtida Jägarstrid.***

Peter Lohmander

Beslutsproblem i denna genomgång:

#1. Val av plats för eldöverfall vid fördröjningsstrid.

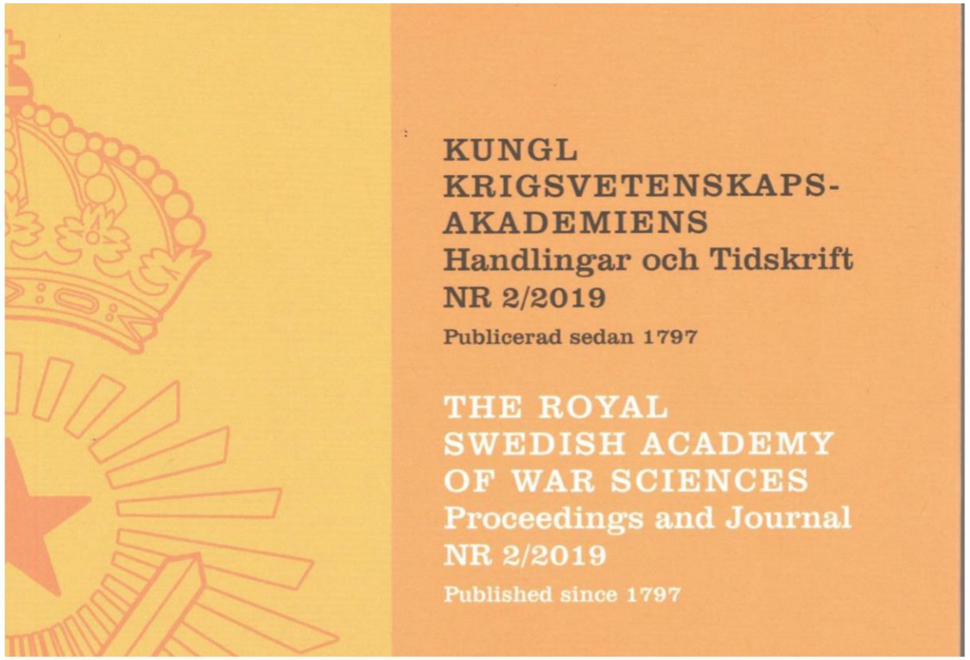
#2. Vägval vid uppmarsch och underhållstransporter.

#3. Positionering av bevaknings- och stridspatruller vid stabsplats.

#4. Val av utgångsgruppering för spaning mot, och störande av, fientlig stabsplats.

Huvudsaklig referens till dagens föreläsning:

Lohmander, P., Fyra centrala militära beslutsproblem, Generella metoder och lösningar, Kungliga Krigsvetenskapsakademiens Handlingar och Tidskrift, Nr. 2/2019, sid 119-134.
https://www.lohmander.com/PLRSAWS_19.pdf



Referens till olika optimeringsmetoder:

Lohmander, P., Applications and Mathematical Modeling in Operations Research, In: Cao BY. (ed) Fuzzy Information and Engineering and Decision. IWDS 2016. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 646. Springer, Cham, 2018
Print ISBN 978-3-319-66513-9, Online ISBN 978-3-319-66514-6, eBook Package: Engineering,
https://doi.org/10.1007/978-3-319-66514-6_5

Fördjupande referens till dagens föreläsning:

Lohmander, P., Optimal decisions and expected values in two player zero sum games with diagonal game matrixes, - Explicit functions, general proofs and effects of parameter estimation errors, International Robotics & Automation Journal,
Volume 5, Issue 5, 2019, pages 186-198.
https://medcraveonline.com/IRATJ/IRATJ-05-00193.pdf

Fördjupande version av dagens föreläsning:

Lohmander, P., Recent advances in general game theory and applications, Lecture at MIUN, Mid Sweden University, Dept. of Economics, Geography, Law and Tourism (EJT), Sundsvall, Sweden, 2020-01-16.
http://www.Lohmander.com/PL_Game_200116.pdf
http://www.Lohmander.com/PL_Game_200116.pptx

Optimering av dynamiskt vapenstöd med koppling till aktuellt krig i Ukraina:

Lohmander, P., Optimal Dynamic Control of Proxy War Arms Support.
Automation 2023, 4, 31-56.
https://doi.org/10.3390/automation4010004

Optimal dimensionering av försvar m.h.t. dynamik samt olika mål:

Lohmander, P., Optimal Deployment, https://www.preprints.org/manuscript/202402.1265/v1

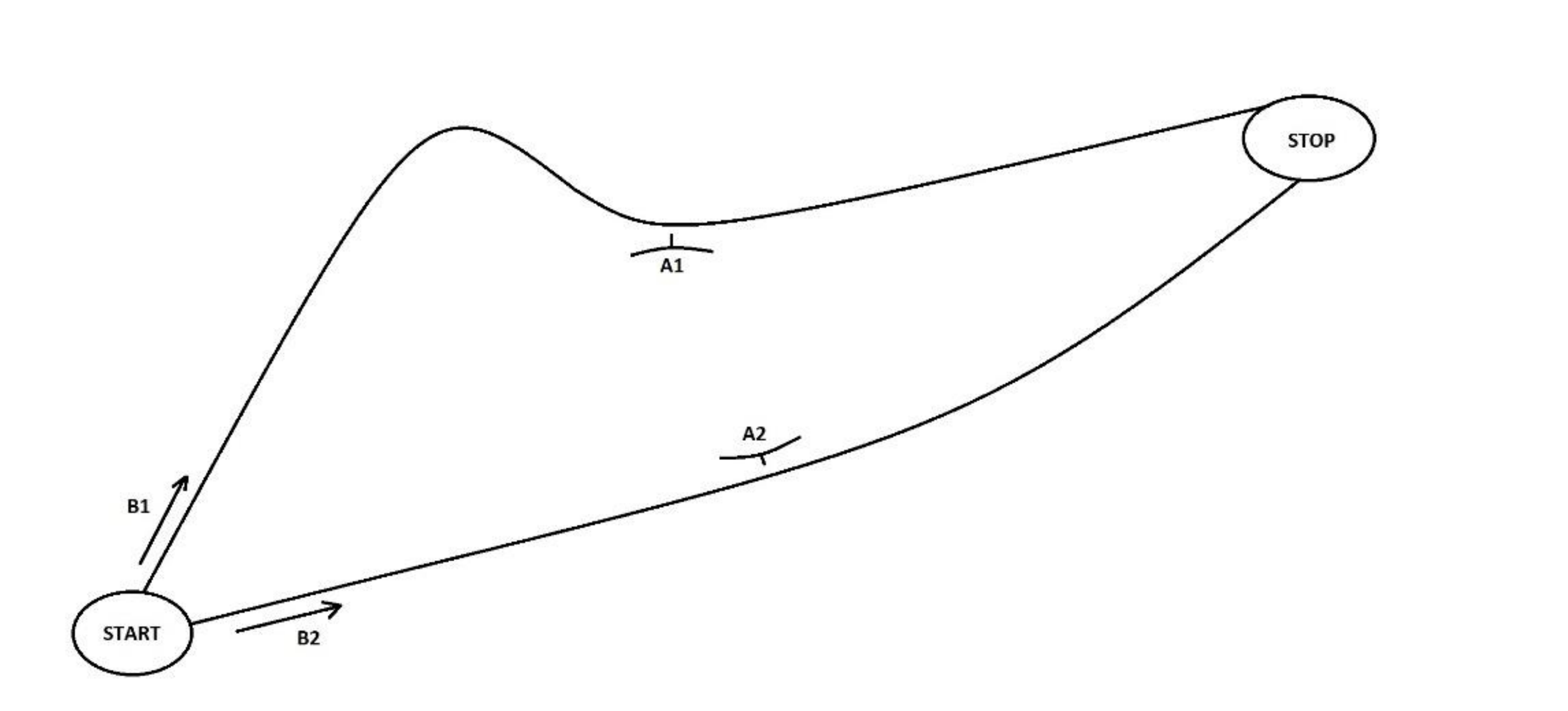
Bestämning av utnötningskoefficienter via strids- statististiska data:

Lohmander, P., Attrition coefficient estimations via differential equation systems, initial and terminal conditions, and nonlinear iterative equation system solutions.
(Submitted.)

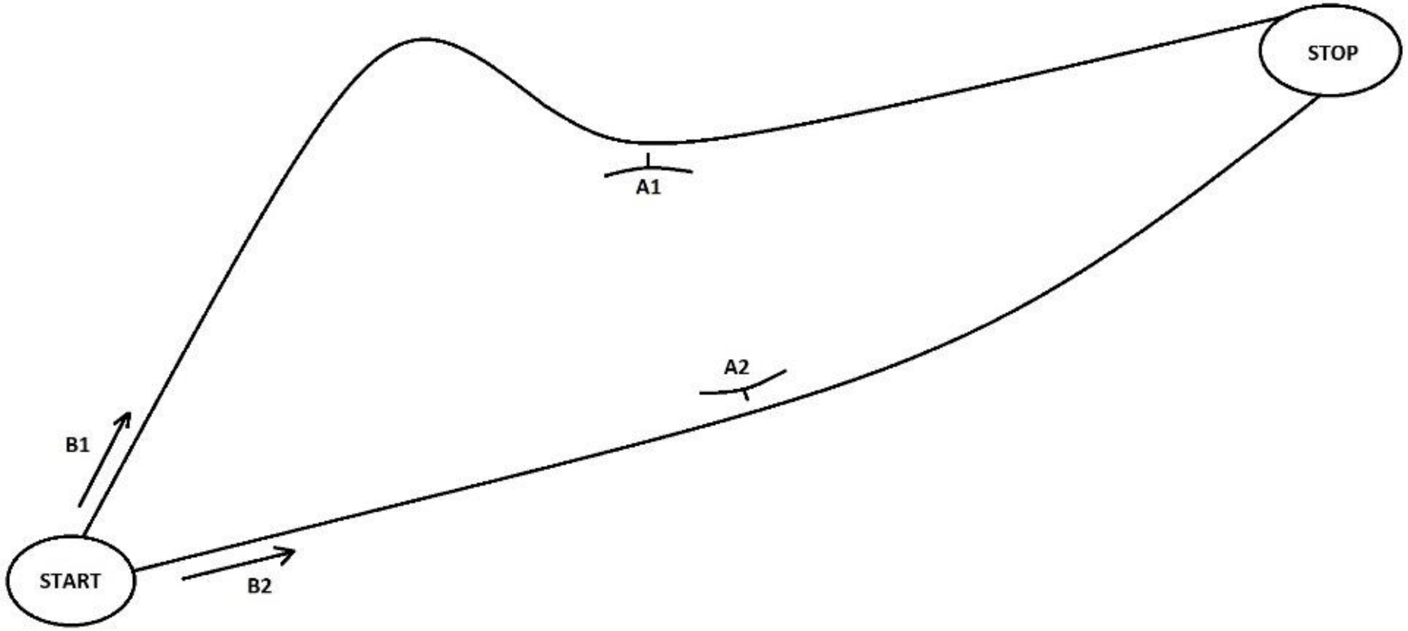
Lohmander, P., Referenser:

https://www.lohmander.com/Information/Ref.htm

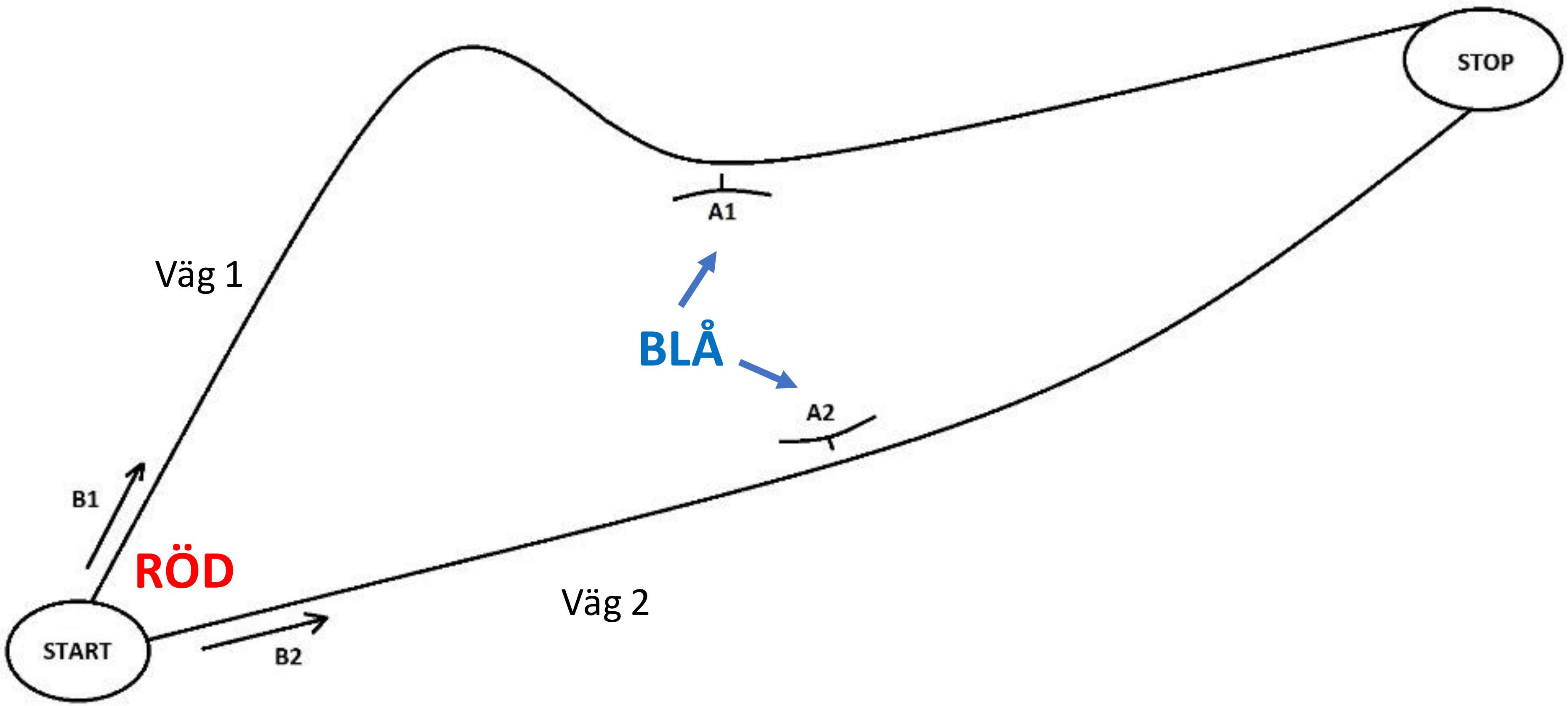
Optimalt Eldöverfall



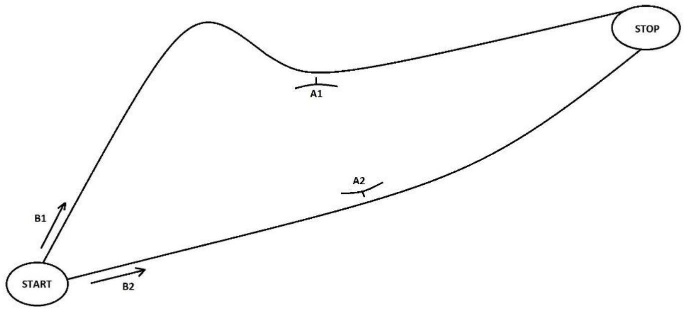
ILLUSTRATIONER genererade via AI med underlag från Peter Lohmander.


STOP
A1
A2
B1
B2
START





STOP
A1
Väg 1
BLÅ
A2
B1
RÖD
START
B2
Väg 2

***Blå* väljer rad.**
***Röd* väljer kolumn.**



Förväntat resultat om blå och röd bägge väljer väg 1.

Förväntat resultat om blå och röd bägge väljer väg 2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

KLARTEXT:

Blå maximerar det förväntade resultatet, E.

Blå väljer x1, sannolikheten för att ta väg 1.

Blå väljer därmed också x2, sannolikheten för att ta väg 2.

E begränsas av det faktum att Röd kan välja beslut B1, d.v.s. väg 1.

E begränsas också av det faktum att Röd kan välja beslut B2, d.v.s. väg 2.

Matematisk formulering:

$$
\begin{aligned}
&\max E \\
&s.t. \\
&\qquad E \le c_{11}x_1 + 0x_2 \quad (if\ \ B_1) \\
&\qquad E \le 0x_1 + c_{22}x_2 \quad (if\ \ B_2) \\
&\qquad 1 = x_1 + x_2 \\
&\qquad 0 \le x_1 \\
&\qquad 0 \le x_2
\end{aligned}
$$

$$\max E$$

$$s.t.$$

$$E \le c_{11} x_1 \quad \left(if \ B_1 \right)$$

$$E \le c_{22} (1 - x_1) \quad \left(if \ B_2 \right)$$

$$\max E$$

$$s.t.$$

$$E \leq c_{11}x_1 \qquad (if\ B_1)$$

$$E \leq c_{22} - c_{22}x_1 \qquad (if\ B_2)$$

Special-fall:

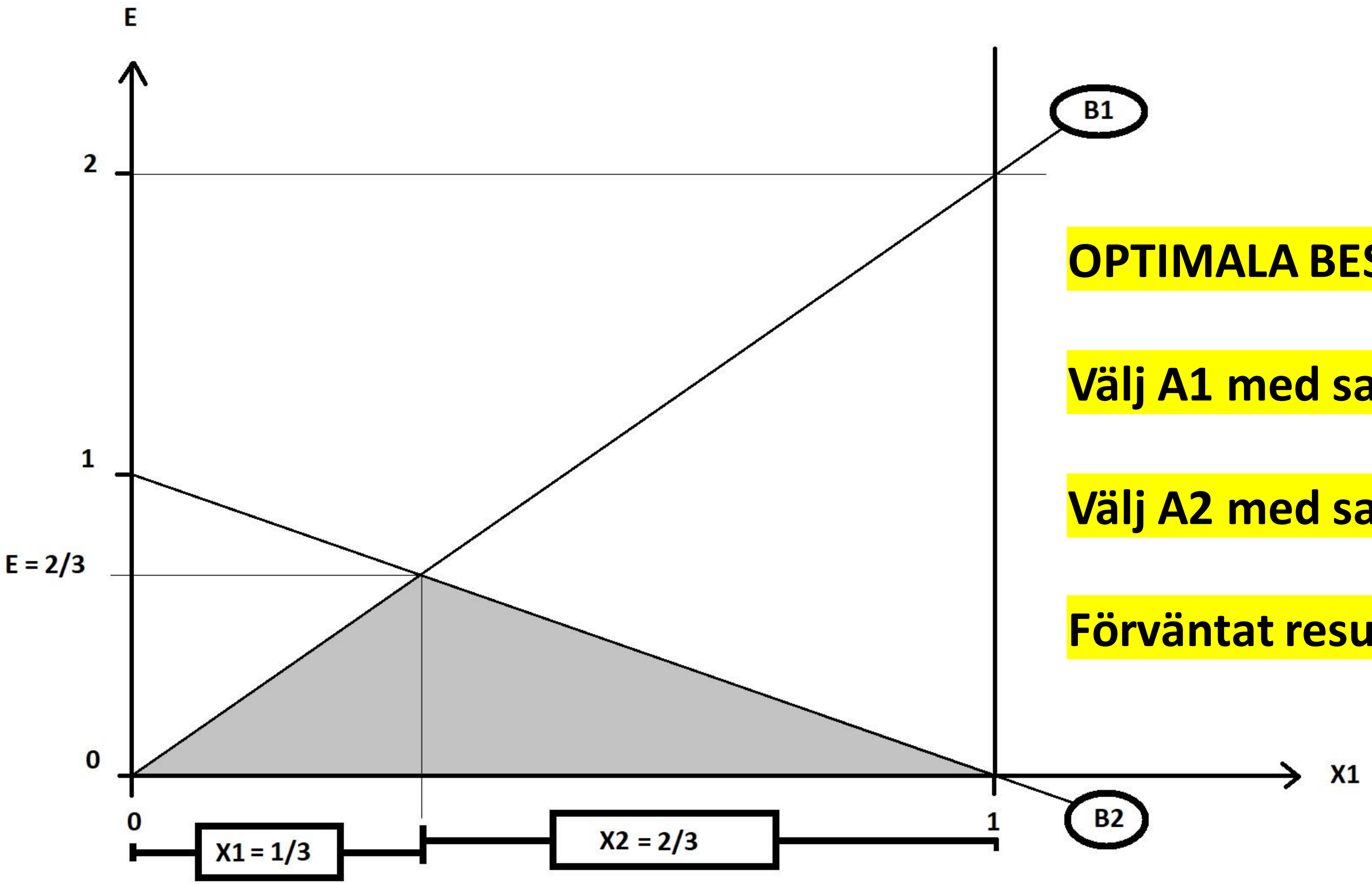
$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\max E$$

$$s.t.$$

$$E \leq 2x_1 \qquad\qquad (if\ B_1)$$

$$E \leq 1 - 1x_1 \qquad\qquad (if\ B_2)$$

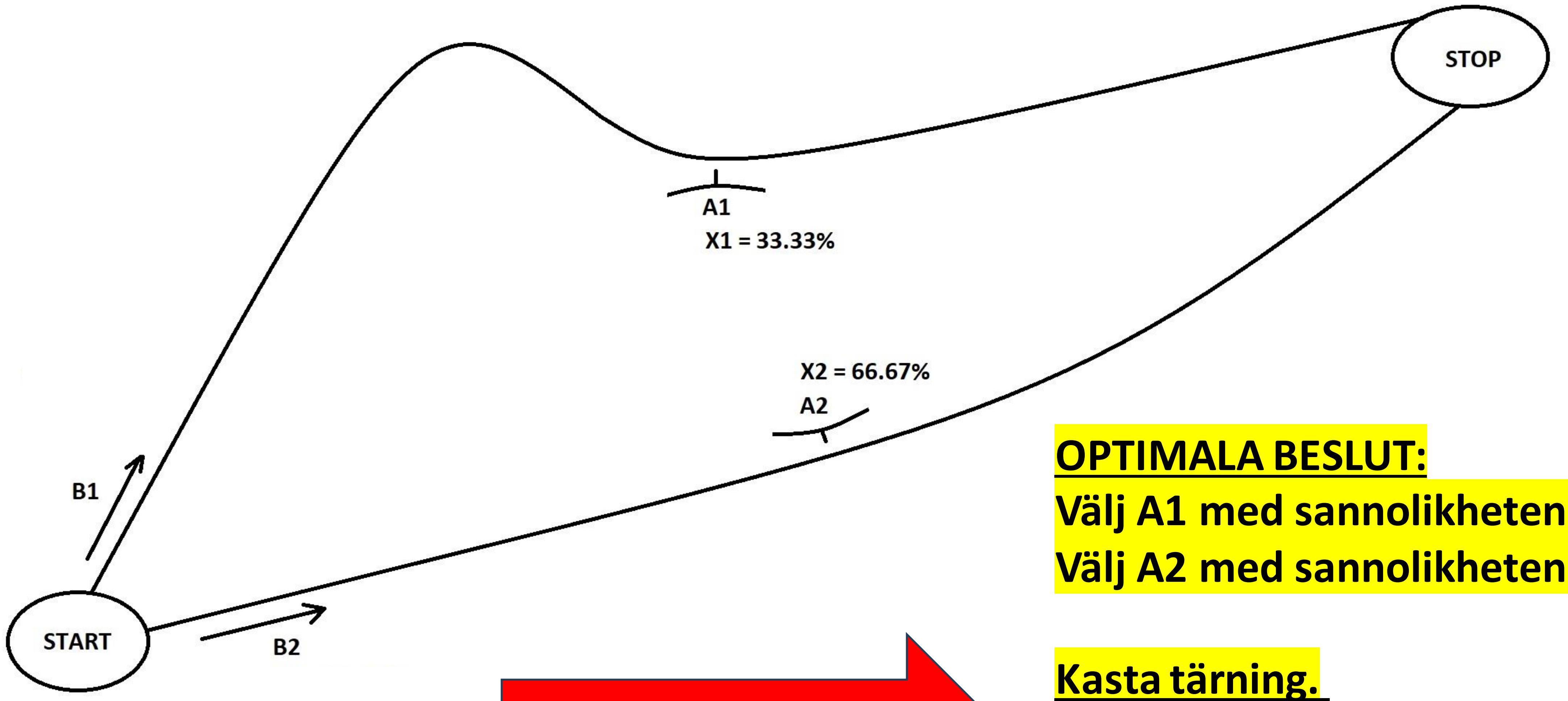


OPTIMALA BESLUT och RESULTAT:

Välj A1 med sannolikheten 1/3.

Välj A2 med sannolikheten 2/3.

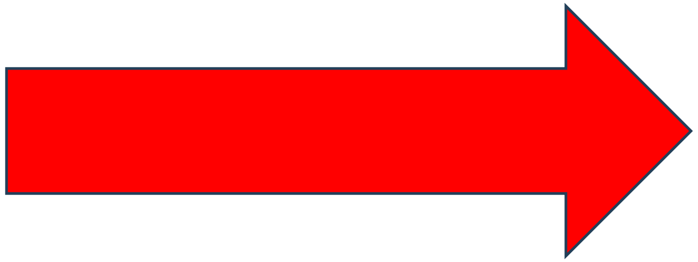
Förväntat resultat: 2/3.



OPTIMALA BESLUT:

Välj A1 med sannolikheten 1/3.

Välj A2 med sannolikheten 2/3.



Kasta tärning.

1 eller 2: Välj A1.

3,4,5 eller 6: Välj A2.

Observation:

If we can be sure that, in optimum, all decisions have stricly positive probabilities, then we know that:

$$E = x_1 c_{11} = x_2 c_{22}$$

Then, if the number of possible decisions is 2, we have:

$$E = x_1 c_{11} = (1 - x_1) c_{22}$$

$$x_1 c_{11} = c_{22} - c_{22} x_1$$

$$x_1 (c_{11} + c_{22}) = c_{22}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{c_{22}}{c_{11} + c_{22}}}$$

$$x_2 = (1 - x_1) = \left(1 - \frac{c_{22}}{c_{11} + c_{22}}\right)$$

$$x_2 = \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{c_{11} + c_{22}} - \frac{c_{22}}{c_{11} + c_{22}}\right)$$

$$\boxed{x_2 = \frac{c_{11}}{c_{11} + c_{22}}}$$

Particular decision rules

Observation:

When there are exactly two possible decisions, and the optimal probabilities are strictly positive, we may calculate the expected value of the game in two ways. The results are identical.

$$E = x_1 c_{11} = x_2 c_{22}$$

$$x_1 = \frac{c_{22}}{c_{11} + c_{22}}$$

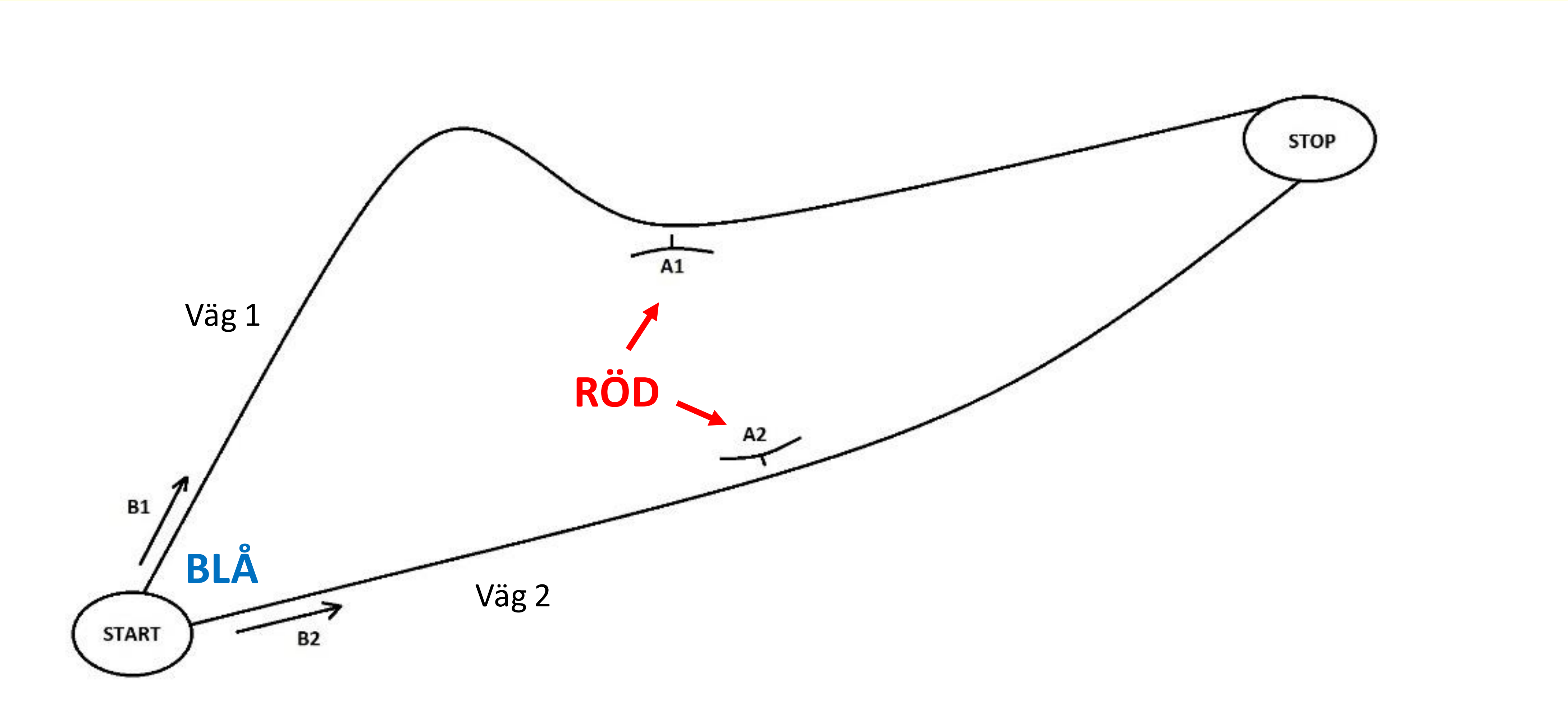
$$x_2 = \frac{c_{11}}{c_{11} + c_{22}}$$

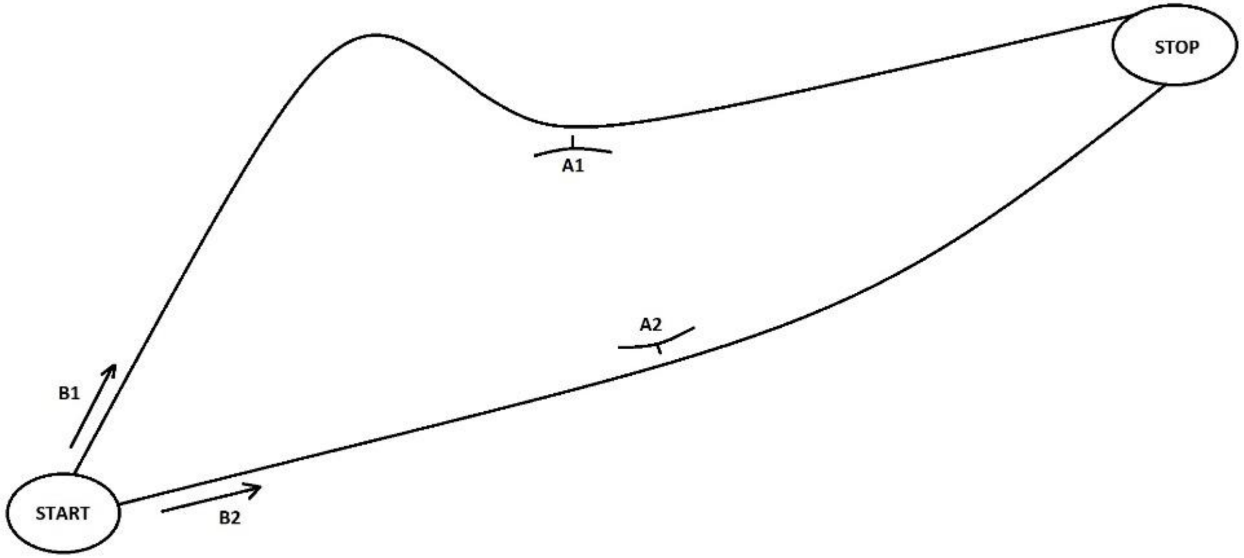
$$\Rightarrow$$

$$E = x_1 c_{11} = \frac{c_{11} c_{22}}{c_{11} + c_{22}}$$

$$E = x_2 c_{22} = \frac{c_{11} c_{22}}{c_{11} + c_{22}}$$

Optimalt vägval

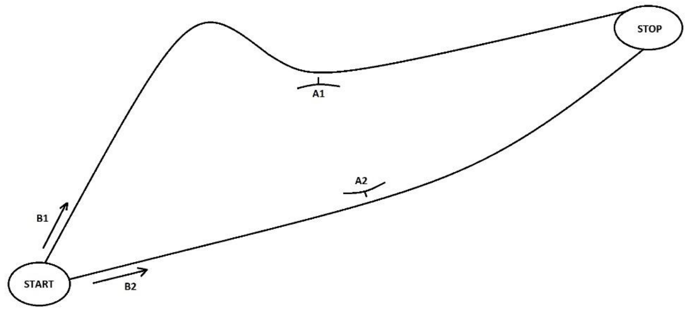



STOP
A1
A2
B1
B2
START

Nya roller:

Röd väljer rad.

Blå väljer kolumn.



Förväntat resultat om blå och röd bägge väljer väg 1.

Förväntat resultat om blå och röd bägge väljer väg 2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

KLARTEXT:

Blå minimerar det förväntade resultatet, E.

Blå väljer y1, sannolikheten för att ta väg 1.

Blå väljer därmed också y2, sannolikheten för att ta väg 2.

E begränsas av det faktum att Röd kan välja beslut A1, d.v.s. väg 1.

E begränsas också av det faktum att Röd kan välja beslut A2, d.v.s. väg 2.

Matematisk formulering:

$$\min E$$

$$s.t.$$

$$E \geq c_{11} y_1 + 0 y_2 \quad (if \ A_1)$$

$$E \geq 0 y_1 + c_{22} y_2 \quad (if \ A_2)$$

$$1 = y_1 + y_2$$

$$0 \leq y_1$$

$$0 \leq y_2$$

$$\min E$$

$$s.t.$$

$$E \geq c_{11} y_1 \qquad \left(if\ A_1\right)$$

$$E \geq c_{22}(1 - y_1) \qquad \left(if\ A_2\right)$$

$$\min E$$

$$s.t.$$

$$E \geq c_{11} y_1 \qquad \left(if \ A_1\right)$$

$$E \geq c_{22} - c_{22} y_1 \qquad \left(if \ A_2\right)$$

Special-fall:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

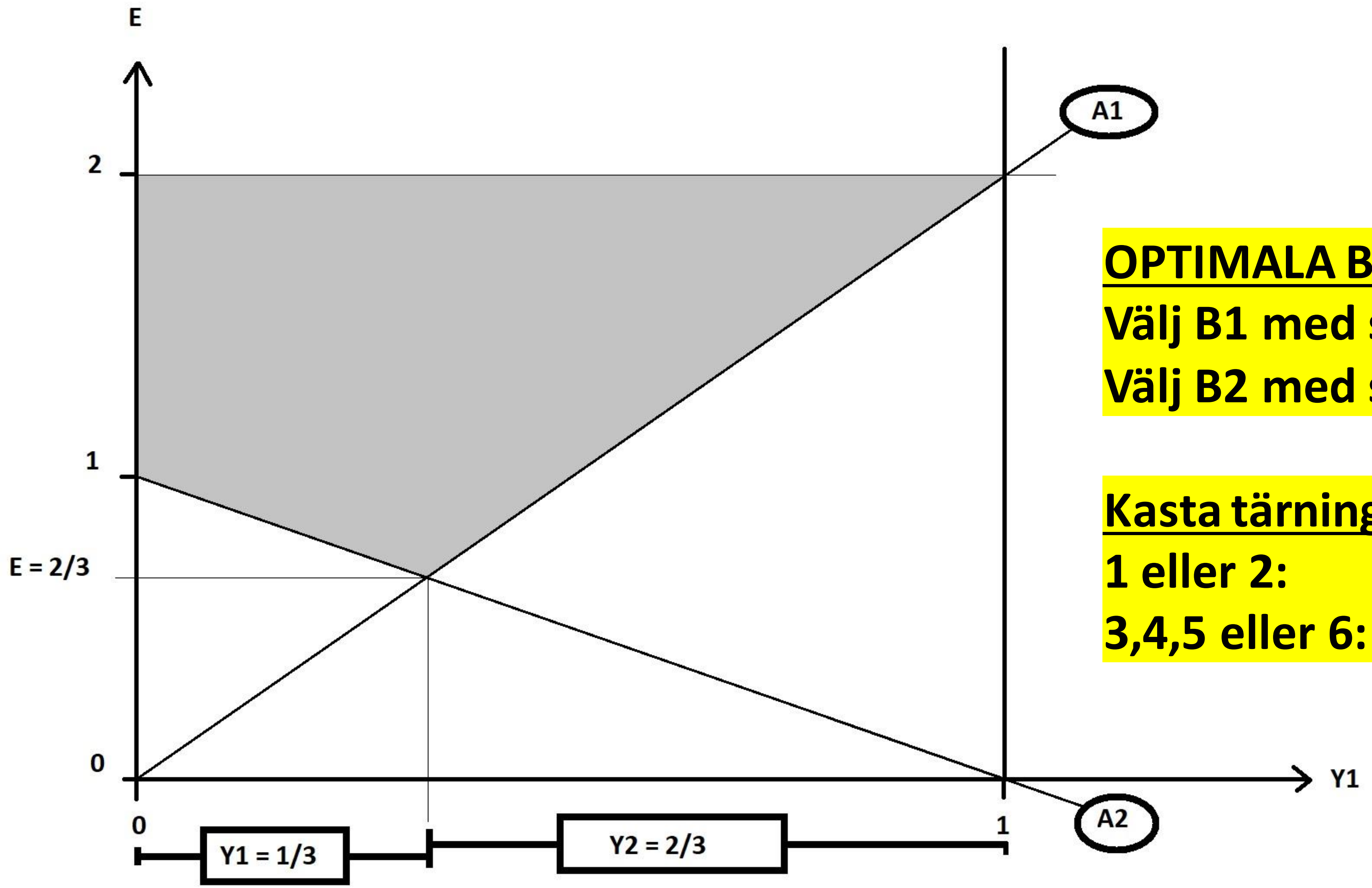
$$\min E$$

$$s.t.$$

$$E \geq 2y_1 \qquad (if\ A_1)$$

$$E \geq 1 - y_1 \qquad (if\ A_2)$$

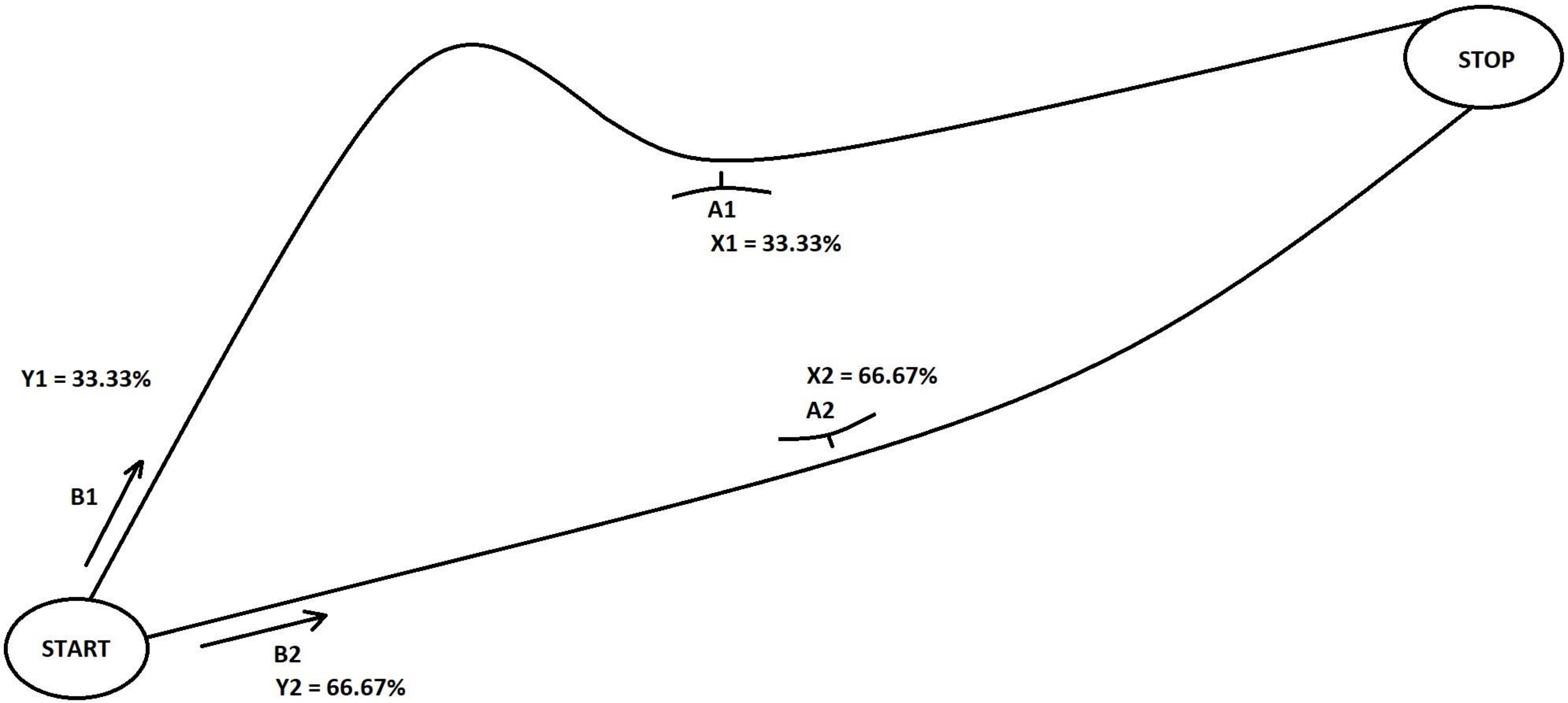
Optimalt förväntat resultat: 2/3.



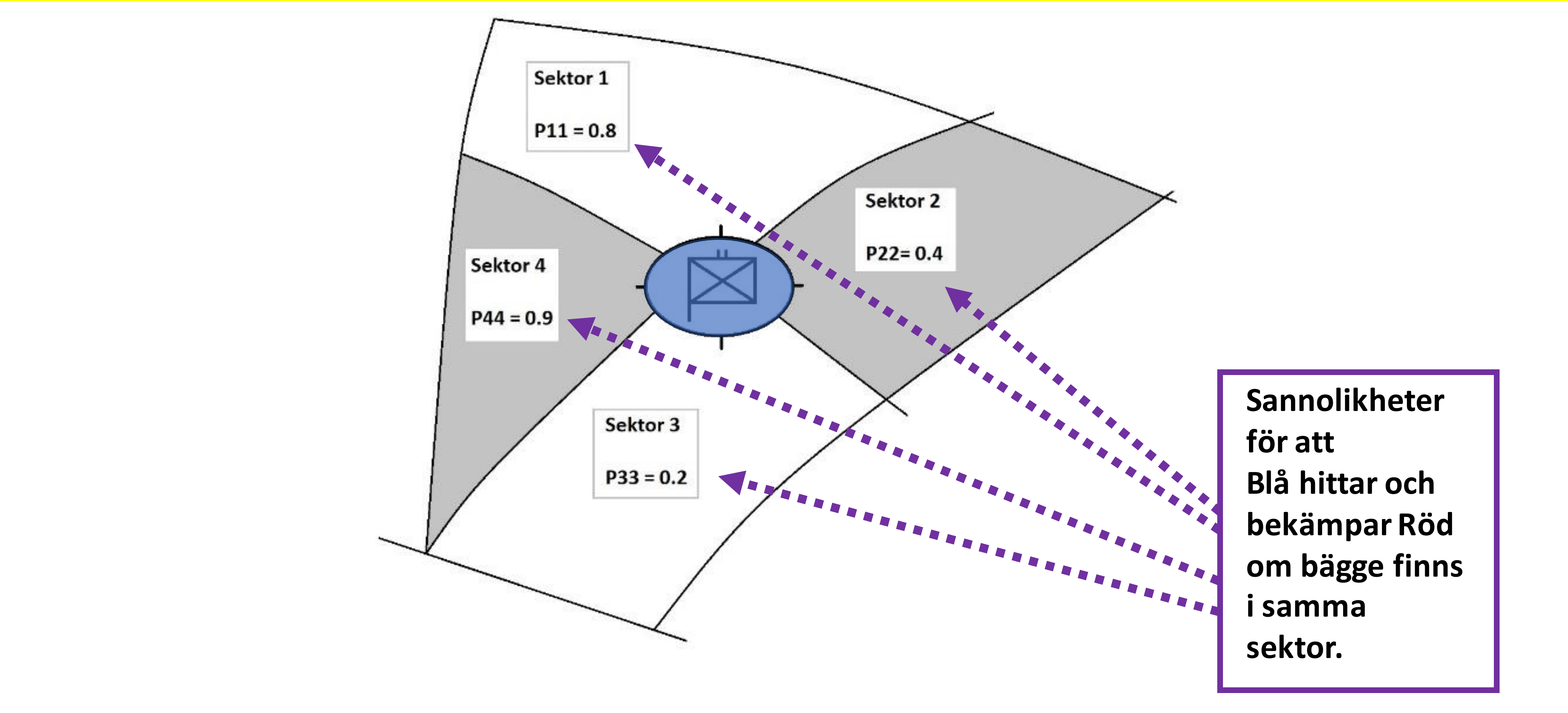
OPTIMALA BESLUT:
Välj B1 med sannolikheten 1/3.
Välj B2 med sannolikheten 2/3.

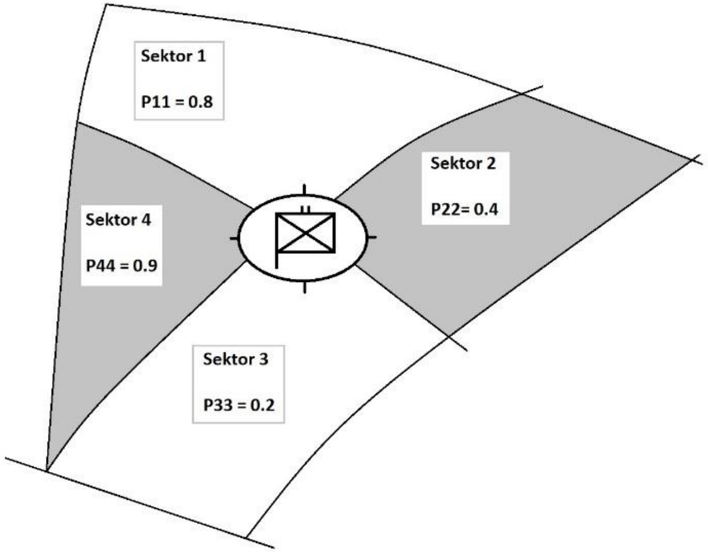
Kasta tärning.
1 eller 2: Välj B1.
3,4,5 eller 6: Välj B2.

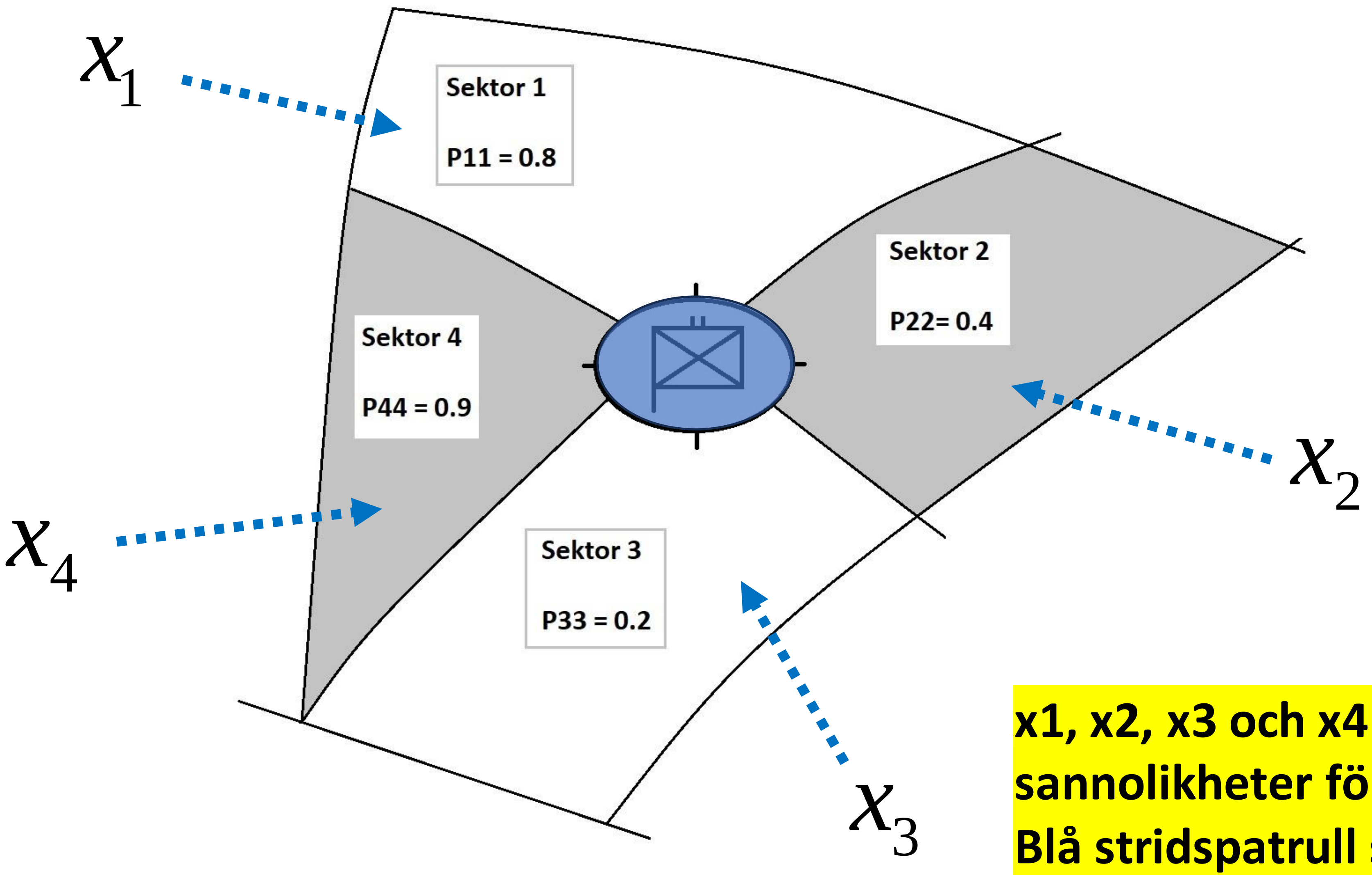
De optimala sannolikheterna för de olika besluten:



Optimal positionering av stridspatrull för skydd av stab




Sektor 1
P11 = 0.8
Sektor 2
P22= 0.4
Sektor 4
P44 = 0.9
Sektor 3
P33 = 0.2



x1, x2, x3 och x4 är optimala sannolikheter för att Blå stridspatrull ska gå till Sektor 1, 2, 3 respektive 4.

KLARTEXT:

Blå MAXIMERAR det förväntade resultatet, E, nämligen sannolikheten att träffa på och bekämpa inkräktarna.

Blå väljer x1, x2, x3 och x4, sannolikheterna för att gå till sektor 1, 2, 3 och 4.

E begränsas av det faktum att Röd kan välja att gå till vilken sektor som helst, 1, 2, 3 eller 4.

$$\max \quad E$$

$$s.t.$$

$$E \le p_{11}x_1 \qquad (if \ S_1)$$

$$E \le p_{22}x_2 \qquad (if \ S_2)$$

$$E \le p_{33}x_3 \qquad (if \ S_3)$$

$$E \le p_{44}x_4 \qquad (if \ S_4)$$

$$1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$x_1 \ge 0; \ x_2 \ge 0; \ x_3 \ge 0; \ x_4 \ge 0$$

Detta följer av det faktum att det kan visas att optimala $x_i > 0$ för alla i.

$$E = p_{11} x_1$$

$$E = p_{22} x_2$$

$$E = p_{33} x_3$$

$$E = p_{44} x_4$$

$$E = p_{11}x_1 = p_{22}x_2 = p_{33}x_3 = p_{44}x_4$$

$$x_1 = \frac{E}{p_{11}}$$

$$x_2 = \frac{E}{p_{22}}$$

$$x_3 = \frac{E}{p_{33}}$$

$$x_4 = \frac{E}{p_{44}}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$\frac{E}{p_{11}}+\frac{E}{p_{22}}+\frac{E}{p_{33}}+\frac{E}{p_{44}}=1$$

$$\frac{1}{p_{11}} + \frac{1}{p_{22}} + \frac{1}{p_{33}} + \frac{1}{p_{44}} = \frac{1}{E}$$

$$\frac{p_{22}p_{33}p_{44} + p_{11}p_{33}p_{44} + p_{11}p_{22}p_{44} + p_{11}p_{22}p_{33}}{p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}} = \frac{1}{E}$$

$$\frac{p_{22}p_{33}p_{44} + p_{11}p_{33}p_{44} + p_{11}p_{22}p_{44} + p_{11}p_{22}p_{33}}{p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}} = \frac{1}{E}$$

$$\frac{0.4 \bullet 0.2 \bullet 0.9 + 0.8 \bullet 0.2 \bullet 0.9 + 0.8 \bullet 0.4 \bullet 0.9 + 0.8 \bullet 0.4 \bullet 0.2}{0.8 \bullet 0.4 \bullet 0.2 \bullet 0.9} = \frac{1}{E}$$

$$E = \frac{0.8 \bullet 0.4 \bullet 0.2 \bullet 0.9}{0.4 \bullet 0.2 \bullet 0.9 + 0.8 \bullet 0.2 \bullet 0.9 + 0.8 \bullet 0.4 \bullet 0.9 + 0.8 \bullet 0.4 \bullet 0.2}$$

$$E \approx 0.10140845$$

$$E \approx 10\%$$

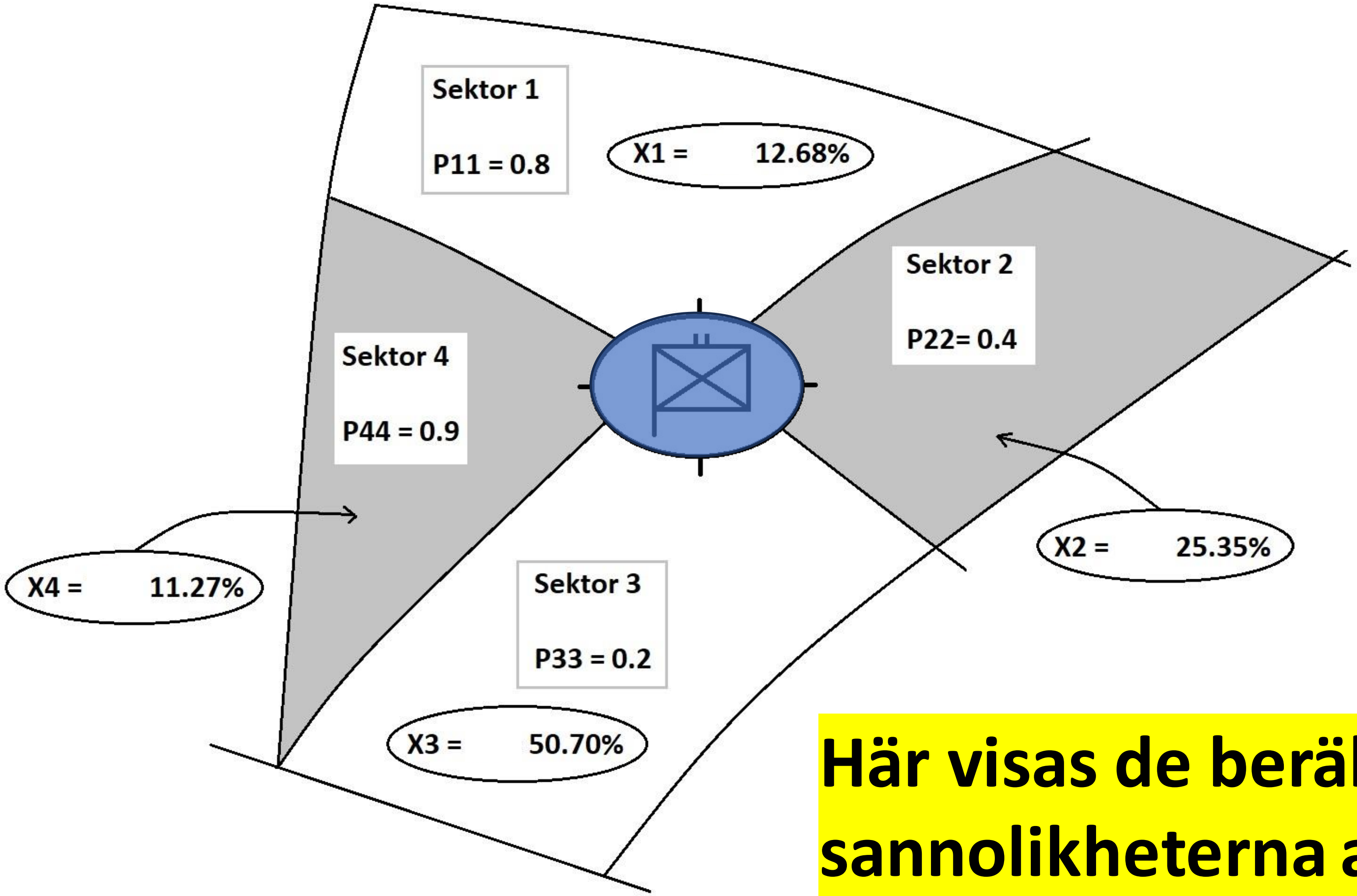
Optimerad sannolikhet att blå stridspatrull hittar och bekämpar Röd inkräktare i detta fall.

$$x_1 = \frac{E}{p_{11}} = \frac{E}{0.8} \approx 12.68\%$$

$$x_2 = \frac{E}{p_{22}} = \frac{E}{0.4} \approx 25.35\%$$

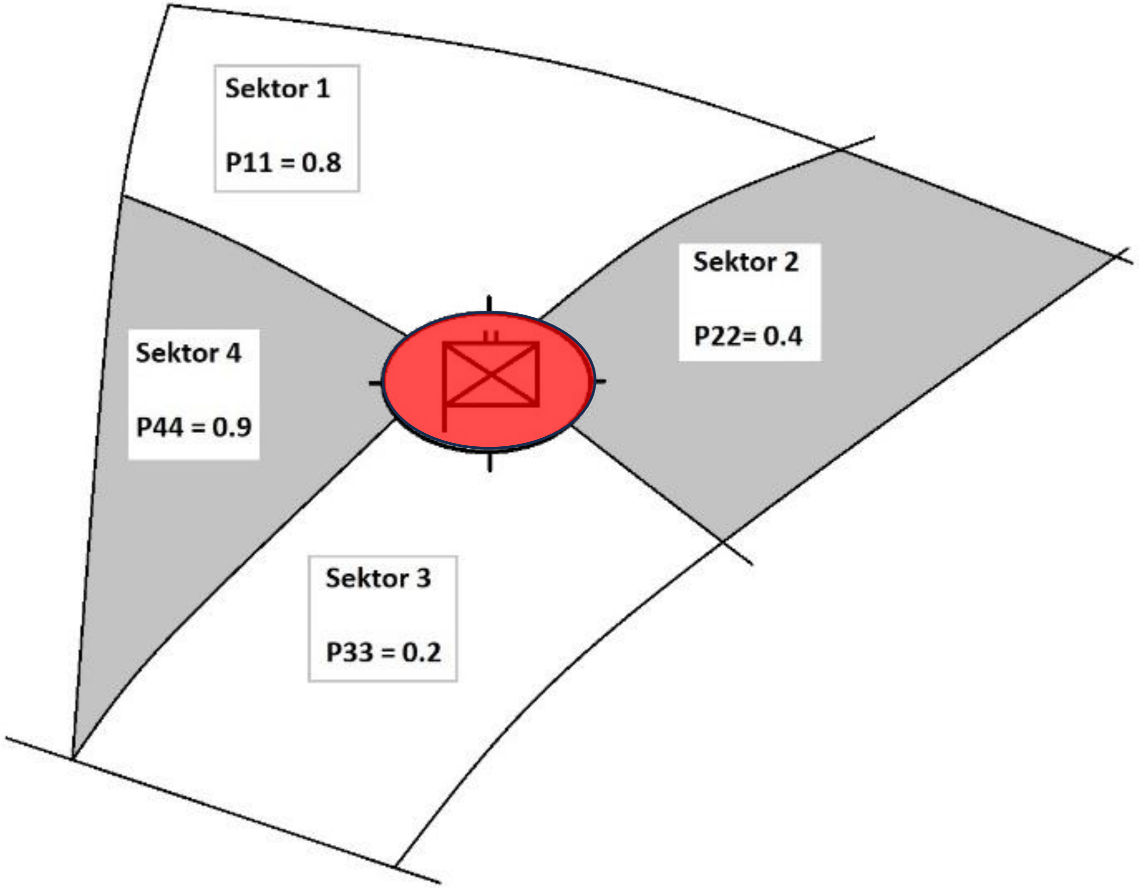
$$x_3 = \frac{E}{p_{33}} = \frac{E}{0.2} \approx 50.70\%$$

$$x_4 = \frac{E}{p_{44}} = \frac{E}{0.9} \approx 11.27\%$$

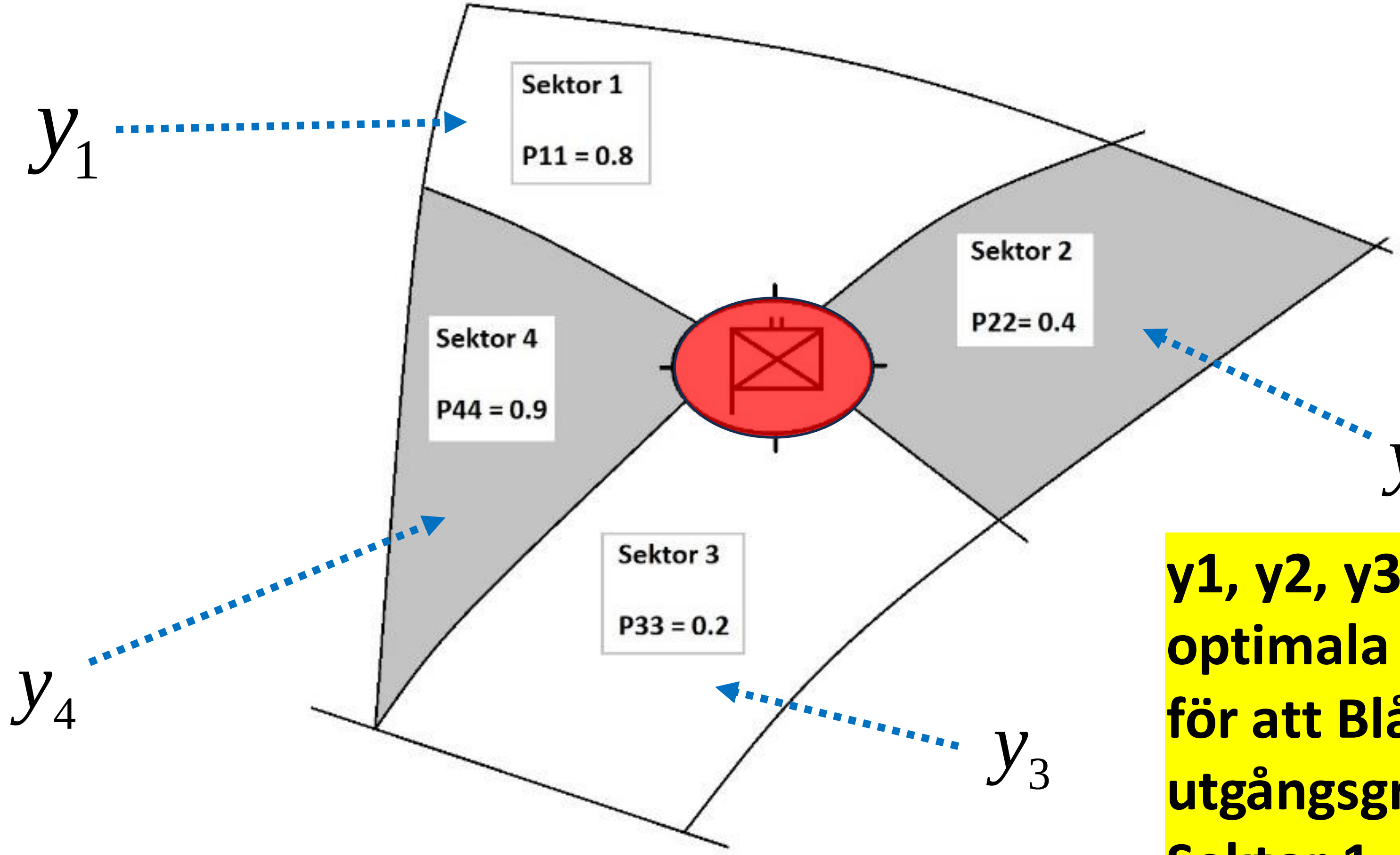


Här visas de beräknade optimala sannolikheterna att Blå bör patrullera de olika sektorerna.

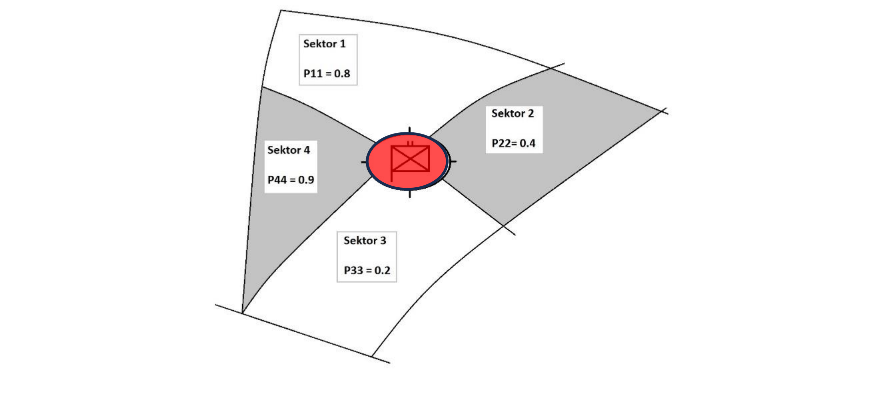
Optimal spaning mot och optimalt överfall på fientlig stab



Optimal utgångsgruppering för spaning och överfall mot fientlig stab



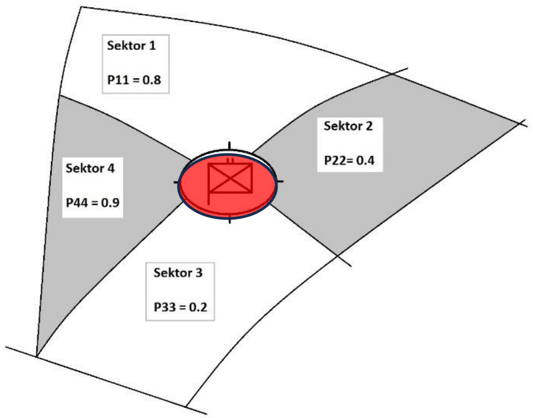
y1, y2, y3 och y4 är optimala sannolikheter för att Blå bör utgångsgruppera i Sektor 1, 2, 3 respektive 4.

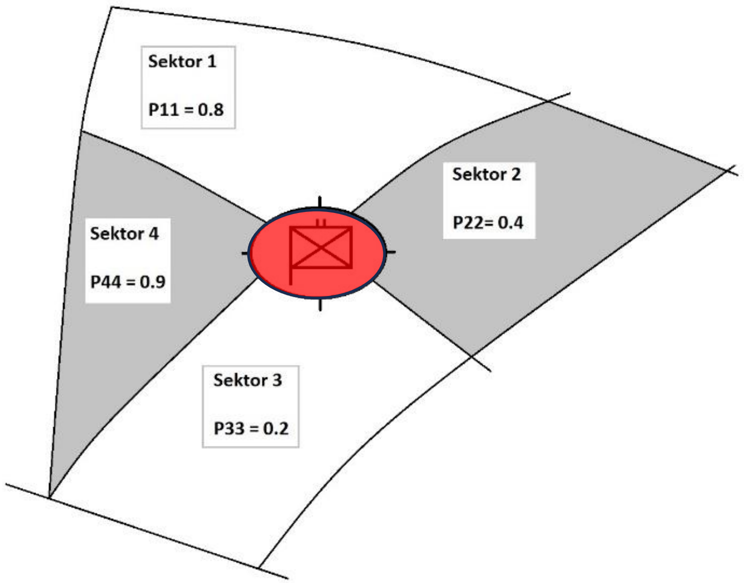

Sektor 1
P11 = 0.8
Sektor 2
P22= 0.4
Sektor 4
P44 = 0.9
Sektor 3
P33 = 0.2

Sannolikheten för att det är optimalt att utgångsgruppera i en viss sektor beror på sannolikheterna för att bli upptäckt och bekämpad i de olika sektorerna, under förutsättning att fientliga patruller finns just där.

Man kan bevisa att det INTE är optimalt att alltid välja den sektor där det är lägst sannolikhet att bli upptäckt och bekämpad om en fientlig patrull finns just där.

De optimala sannolikheterna för att välja olika sektorer kan endast beräknas på det sätt som visas i denna presentation.





Sektor 1
P11 = 0.8
Sektor 2
P22= 0.4
Sektor 4
P44 = 0.9
Sektor 3
P33 = 0.2

KLARTEXT:

Blå MINIMERAR det förväntade resultatet, E, nämligen sannolikheten att upptäckas och bekämpas av Röd fientlig stridspatrull.

Blå väljer y1, y2, y3 och y4, sannolikheterna för att utgångsgruppera i sektor 1, 2, 3 eller 4.

E begränsas av det faktum att Röd kan välja att skicka stridspatruller till vilken sektor som helst, 1, 2, 3 eller 4.

$$\min \quad E$$

$$s.t.$$

$$E \geq p_{11} y_1 \qquad (if \;\; S_1)$$

$$E \geq p_{22} y_2 \qquad (if \;\; S_2)$$

$$E \geq p_{33} y_3 \qquad (if \;\; S_3)$$

$$E \geq p_{44} y_4 \qquad (if \;\; S_4)$$

$$1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

$$y_1 \geq 0; \; y_2 \geq 0; \; y_3 \geq 0; \; y_4 \geq 0$$

Man kan bevisa att optimala sannolikheter är strikt positiva.

$$E = p_{11} y_1$$

$$E = p_{22} y_2$$

$$E = p_{33} y_3$$

$$E = p_{44} y_4$$

$$E = p_{11} y_1 = p_{22} y_2 = p_{33} y_3 = p_{44} y_4$$

$$y_1 = \frac{E}{p_{11}} = x_1$$

$$y_2 = \frac{E}{p_{22}} = x_2$$

$$y_3 = \frac{E}{p_{33}} = x_3$$

$$y_4 = \frac{E}{p_{44}} = x_4$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$$

$$\frac{E}{p_{11}} + \frac{E}{p_{22}} + \frac{E}{p_{33}} + \frac{E}{p_{44}} = 1$$

$$\frac{E}{p_{11}}+\frac{E}{p_{22}}+\frac{E}{p_{33}}+\frac{E}{p_{44}}=1$$

$$\frac{1}{p_{11}}+\frac{1}{p_{22}}+\frac{1}{p_{33}}+\frac{1}{p_{44}}=\frac{1}{E}$$

$$\frac{1}{p_{11}} + \frac{1}{p_{22}} + \frac{1}{p_{33}} + \frac{1}{p_{44}} = \frac{1}{E}$$

$$\frac{p_{22}p_{33}p_{44} + p_{11}p_{33}p_{44} + p_{11}p_{22}p_{44} + p_{11}p_{22}p_{33}}{p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}} = \frac{1}{E}$$

$$\frac{p_{22}p_{33}p_{44} + p_{11}p_{33}p_{44} + p_{11}p_{22}p_{44} + p_{11}p_{22}p_{33}}{p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}} = \frac{1}{E}$$

$$\frac{0.4 \bullet 0.2 \bullet 0.9 + 0.8 \bullet 0.2 \bullet 0.9 + 0.8 \bullet 0.4 \bullet 0.9 + 0.8 \bullet 0.4 \bullet 0.2}{0.8 \bullet 0.4 \bullet 0.2 \bullet 0.9} = \frac{1}{E}$$

$$E = \frac{0.8 \bullet 0.4 \bullet 0.2 \bullet 0.9}{0.4 \bullet 0.2 \bullet 0.9 + 0.8 \bullet 0.2 \bullet 0.9 + 0.8 \bullet 0.4 \bullet 0.9 + 0.8 \bullet 0.4 \bullet 0.2}$$

$$E \approx 0.10140845$$

$$E \approx 10\%$$

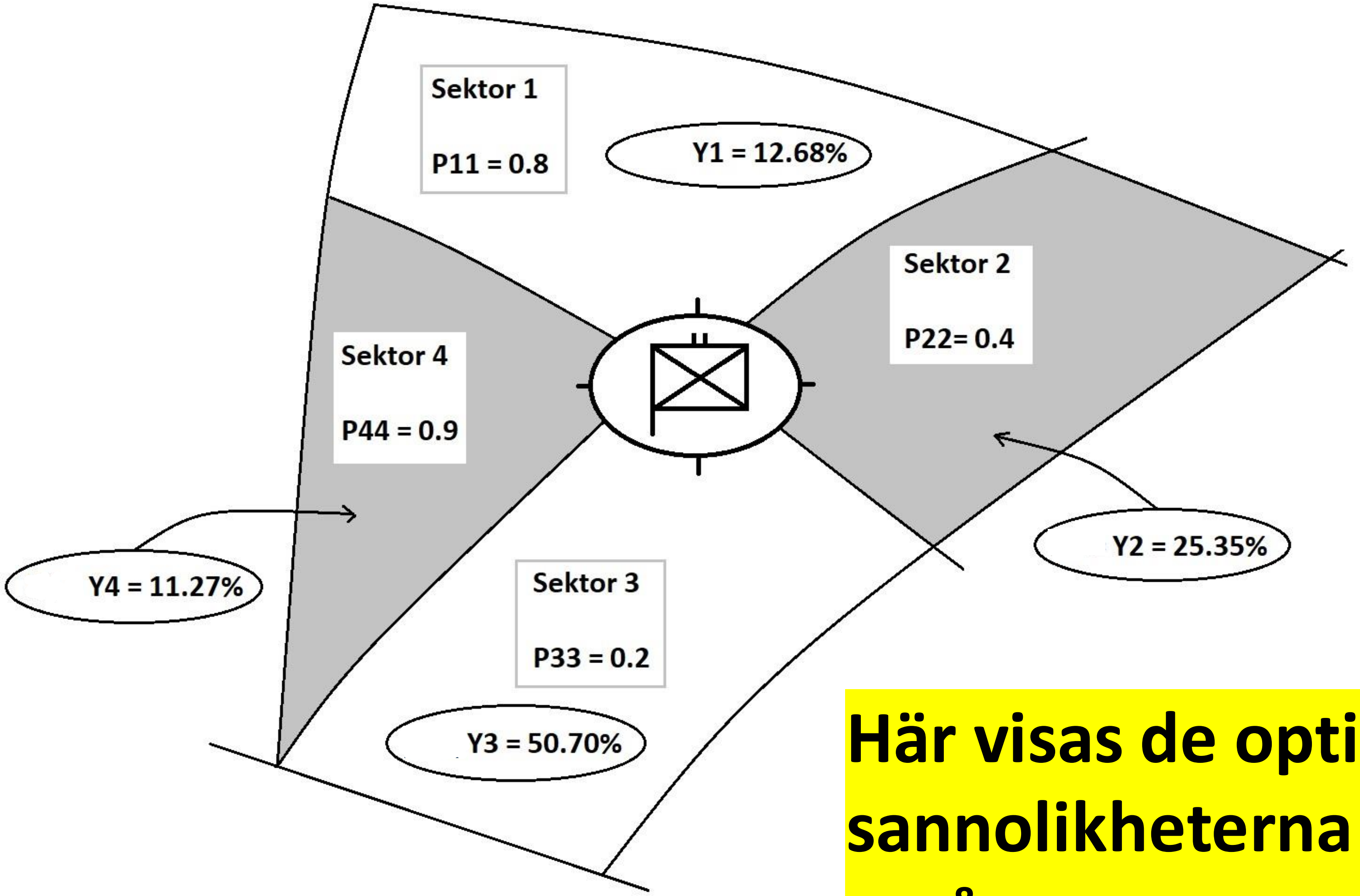
Minimerad sannolikhet att Röd stridspatrull hittar och bekämpar Blå i detta fall.

$$y_1 = \frac{E}{p_{11}} = \frac{E}{0.8} \approx 12.68\%$$

$$y_2 = \frac{E}{p_{22}} = \frac{E}{0.4} \approx 25.35\%$$

$$y_3 = \frac{E}{p_{33}} = \frac{E}{0.2} \approx 50.70\%$$

$$y_4 = \frac{E}{p_{44}} = \frac{E}{0.9} \approx 11.27\%$$



Här visas de optimala sannolikheterna att Blå bör utgångsgruppera i de olika sektorerna.

VIKTIG OBSERVATION:

Sannolikheterna att Blå bör utgångsgruppera i de olika sektorerna

är lika med

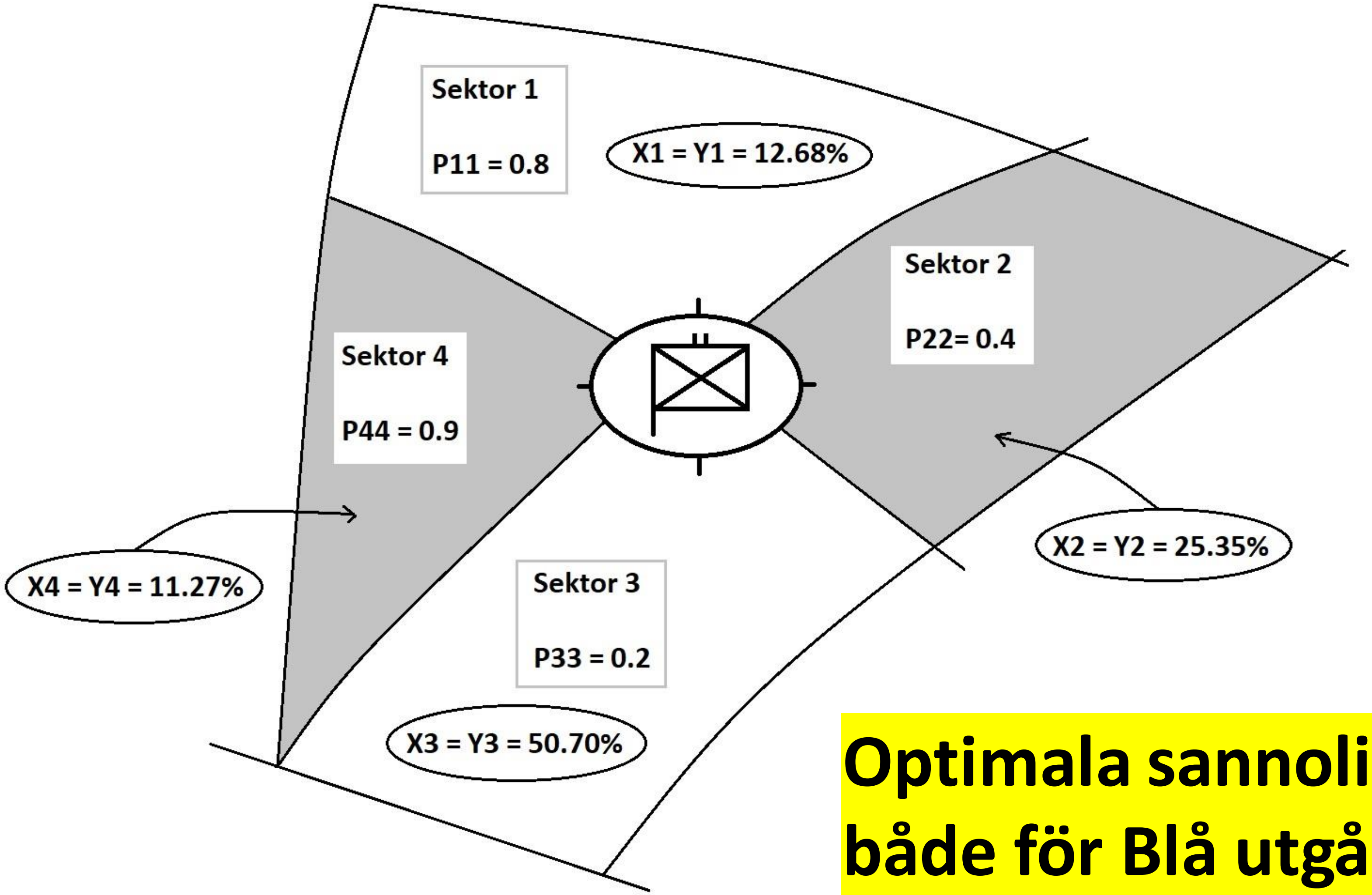
sannolikheterna att Röd bör patrullera i de olika sektorerna.

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2$$

$$y_3 = x_3$$

$$y_4 = x_4$$



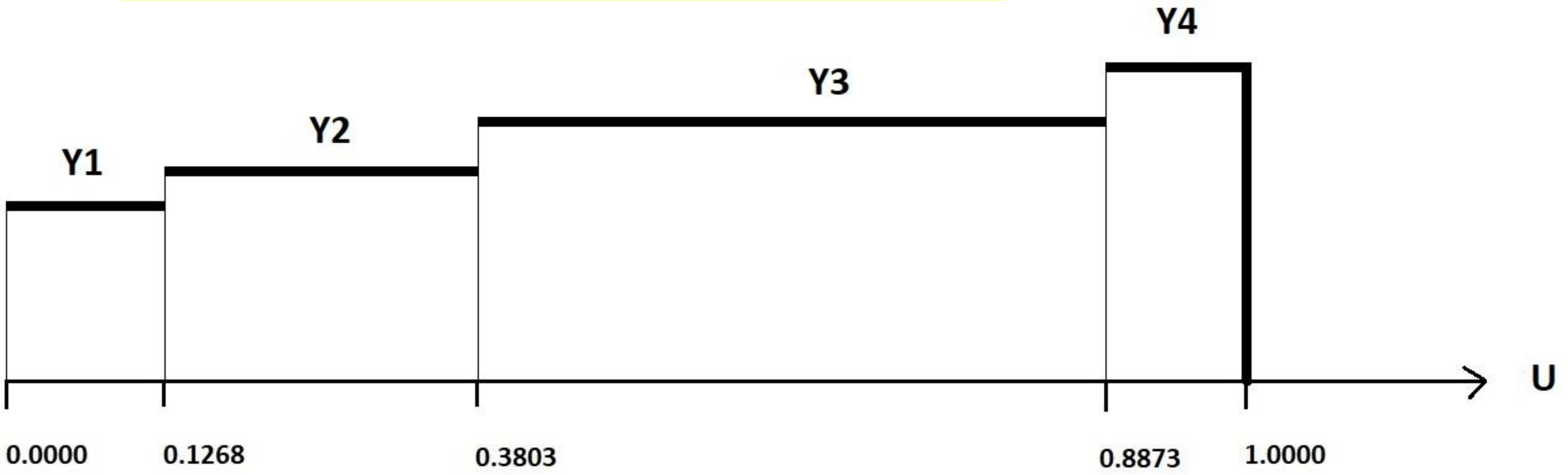
**Optimala sannolikheter,
både för Blå utgångsgruppering
och för Röd patrullering.**

Val av sektor för stridspatrullering:

1. Konstruera följande figur.
2. Generera ett slumptal, S, med likformig fördelning, mellan 0 och 1.
3. Figuren visar vilken sektor som bör väljas.
4. (Exempel: Om 0.1268 < S < 0.3803, välj Sektor 2.)

Val av sektor för utgångsgruppering:

1. Konstruera följande figur.
2. Generera ett slumptal, U, med likformig fördelning, mellan 0 och 1.
3. Figuren visar vilken sektor som bör väljas.
4. (Exempel: Om 0.3803 < U < 0.8873, välj Sektor 3.)




Kontroll

Är detta korrekt?

$$E = x_1 y_1 p_{11} + x_2 y_2 p_{22} + x_3 y_3 p_{33} + x_4 y_4 p_{44}$$

$$E \approx 0.10140845$$

Ja, beräkningarna stämmer.

Slutsats:

Denna presentation och de artiklar med länkar som den bygger på, har visat hur optimala beslut bör fastställas i fyra olika typiska strids-situationer.

Genom detta slag av beslutsfattande effektiviseras Jägarstriden. Detta är inte en åsikt utan ett matematiskt bevisat faktum.

Jag hoppas, i Nationens intresse, att denna metodik får genomslag, såväl i framtida Jägarstrid som i militär utbildning.

Tack för uppmärksamheten!

Peter Lohmander